

# 体拡大のテンソル積による特徴付けとGrothendieckのGalois理論

本稿では、体の代数拡大（有限次拡大、分離拡大、正規拡大、Galois拡大）といった基本的な概念を、「**体のテンソル積 (tensor product)**」の視点から特徴付ける手法について解説します。

通常のGalois理論の基本定理の証明では、ArtinやDedekindによる線形代数的な「拡大次数の不等式評価」が鍵となります。しかし、テンソル積による特徴付けを用いると、この複雑な評価を回避し、「環のイデアルによる剰余」や「冪等元による直積分解」といった純粋に可換環論的・幾何学的な操作のみで、Galois対応を鮮やかに証明することができます。これは、代数幾何学におけるエタール基本群などへと繋がる**GrothendieckのGalois理論**の最も基礎的なアイデアです。

数学的な命題や証明は厳密さを期すため「だ・である調」で記述し、合間の解説は親しみやすいように「です・ます調」で記述しています。

## 1. 基礎概念の準備

まずは、本稿で用いる体論と環論の基本概念を整理しておきましょう。

### 定義 1.1 (体の拡大に関する諸概念)

$K$  を体とし、 $L$  をその拡大体とする。

- 有限次拡大 (finite extension):**  $L$  が  $K$ -ベクトル空間として有限次元であること。その次元を  $[L:K]$  で表す。
- 代数拡大 (algebraic extension):**  $L$  の任意の元  $\alpha$  が、 $K$  係数の非零な多項式の根になること。 $\alpha$  を根に持つモニックで次数最小の多項式を**最小多項式 (minimal polynomial)**と呼ぶ。
- 分離拡大 (separable extension):** 代数拡大であって、任意の元の最小多項式が重根を持たない (分離多項式である) こと。
- 正規拡大 (normal extension):** 代数拡大であって、 $K$  上の既約多項式が  $L$  に1つでも根を持てば、 $L$  上で一次式に完全に分解すること。
- Galois拡大 (Galois extension):** 分離的かつ正規な代数拡大であること。

### 定義 1.2 (テンソル積)

$K$  を体、 $L, M$  を  $K$  を部分体として含む可換環とする。 $L$  と  $M$  の  $K$  上のテンソル積 (tensor product)  $L \otimes_K M$  とは、 $K$ -ベクトル空間としてのテンソル積に、自然な積  $(x \otimes y)(x' \otimes y') = (xx') \otimes (yy')$  を与えて可換環としたものである。

### 定義 1.3 (環論の諸概念)

- **被約環 (reduced ring):**  $x^n = 0$  となるような非零元 (すなわち冪零元) を持たない可換環。
- **Artin環 (Artinian ring):** イデアルの降鎖条件を満たす環。**局所Artin環 (local Artinian ring)** とは、極大イデアルをただ1つ持つArtin環である。

体のテンソル積は一般には体にならず、直積環や被約でない環になることがあります。この「体から環への拡張」こそが、テンソル積が体拡大の構造を映し出す鏡となる理由です。

### 例 1.4

$K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$  の場合を考える。 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  であるから、

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1)$$

と計算できる。複素数体  $\mathbb{C}$  上では  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  と分解されるため、中国剰余定理より

$$\mathbb{C}[X]/((X - i)(X + i)) \cong \mathbb{C}[X]/(X - i) \times \mathbb{C}[X]/(X + i) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

となる。すなわち、 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  であり、体のテンソル積が2つの体の直積環となることがわかる。

## 2. 体拡大のテンソル積による特徴付け

以下、 $L$  を体  $K$  の拡大体とし、 $A = L \otimes_K L$  とおきます。 $A$  を  $L$ -ベクトル空間 (および  $L$ -代数) と見なすときは、第一成分の積  $x \cdot (a \otimes b) = (xa) \otimes b$  によって構造を定めます。

### 定理 2.1 (体拡大の特徴付け)

以下の条件について、それぞれ両方向の同値性が成り立つ。

1.  $L$  は  $K$  の有限次拡大である  $\iff A$  は  $L$ -ベクトル空間として有限次元である。
2.  $L$  は  $K$  の分離拡大である  $\iff A$  は被約環である。
3.  $L$  は  $K$  の正規拡大である  $\iff L/K$  は代数拡大であり、任意の素イデアル  $\mathfrak{p} \subset A$  に対し  $\text{Frac}(A/\mathfrak{p}) \cong L$  である。
4.  $L$  は  $K$  の有限次分離拡大である  $\iff A$  は有限個の体の直積に同型である。
5.  $L$  は  $K$  の有限次正規拡大である  $\iff A$  は有限個の局所Artin環の直積  $\prod_{i=1}^r A_i$  に同型で、各剰余体  $A_i/\mathfrak{m}_i \cong L$  である。
6.  $L$  は  $K$  の有限次Galois拡大である  $\iff A$  は  $[L:K]$  個の体  $L$  の直積に同型である。

これらの証明を順に追っていきましょう。

### 証明 (1): 有限次拡大 $\iff L$ -有限次元

( $\implies$ )  $[L:K] = n < \infty$  とする。 $L$  の  $K$ -基底を  $\{e_1, \dots, e_n\}$  とすると、 $L = \bigoplus_{i=1}^n K e_i$  である。テンソル積の分配律より、

$$A = L \otimes_K \left( \bigoplus_{i=1}^n K e_i \right) \cong \bigoplus_{i=1}^n (L \otimes_K K) e_i \cong \bigoplus_{i=1}^n L(1 \otimes e_i)$$

したがって、 $A$  は  $\{1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n\}$  を基底とする  $n$  次元の  $L$ -ベクトル空間である。

( $\Leftarrow$ )  $\dim_L(A) = n < \infty$  とする。 $A$  を  $K$ -ベクトル空間として見ると、 $\dim_K(A) = \dim_K(L) \dim_L(A) = n \dim_K(L)$  となる。一方、テンソル積の定義より  $\dim_K(A) = (\dim_K(L))^2$  である。したがって  $\dim_K(L) = n < \infty$  となり、 $L/K$  は有限次拡大である。

### 証明 (2): 分離拡大 $\iff$ 被約環

( $\implies$ )  $L/K$  が分離拡大であるとする。任意の有限生成部分拡大  $L_i/K$  は原始元定理より  $L_i = K(\alpha_i)$  と書ける。 $\alpha_i$  の最小多項式  $f_i(X) \in K[X]$  は分離多項式であるため、 $L_i \otimes_K L_i \cong L_i[X]/(f_i(X))$  は重根を持たず、有限個の体の直積となり被約環である。 $L/K$  は有限次分離拡大の直極限  $L = \varinjlim L_i$  と書け、テンソル積は直極限と可換であるため  $A = \varinjlim (L_i \otimes_K L_i)$  となる。被約環の直極限も被約環であるため、 $A$  は被約環である。

( $\Leftarrow$ ) 対偶を示す。 $L/K$  が分離拡大でないとする。このとき  $\text{char}(K) = p > 0$  であり、非分離的な元  $\alpha \in L \setminus K$  とある整数  $e \geq 1$  が存在し、 $\alpha^{p^e} = a \in K$  となる。 $A$  において  $u = \alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha$  とおく。 $1$  と  $\alpha$  は  $K$  上一次独立なので  $u \neq 0$  である。しかし、

$$u^{p^e} = (\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha)^{p^e} = \alpha^{p^e} \otimes 1 - 1 \otimes \alpha^{p^e} = a \otimes 1 - 1 \otimes a = 0$$

となり、 $u$  は非零の冪零元である。したがって  $A$  は被約環ではない。

### 証明 (3): 正規拡大 $\iff$ 剰余体が $L$ に同型

( $\implies$ )  $L/K$  が正規拡大であるとする。任意の素イデアル  $\mathfrak{p} \subset A$  を取り、 $E = \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$  とおく。 $L/K$  は代数拡大なので、 $A$  は  $L$  上代数的な環である。したがって整域  $A/\mathfrak{p}$  も  $L$  上代数的であり、体となる。すなわち  $E = A/\mathfrak{p}$  である。

自然な準同型写像  $\phi_1(x) = x \otimes 1 \pmod{\mathfrak{p}}$  と  $\phi_2(x) = 1 \otimes x \pmod{\mathfrak{p}}$  を考える。 $L$  は体なので、これらは零環ではない  $E$  への単射である。任意の  $\alpha \in L$  の  $K$  上の最小多項式を  $f(X) \in K[X]$  とすると、

$f(\phi_2(\alpha)) = f(1 \otimes \alpha) \pmod{\mathfrak{p}} = 1 \otimes f(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}} = 0$  となる。 $L/K$  は正規拡大なので、 $f(X)$  は  $L$  上で一次式に完全に分解する。よって、その根である  $\phi_2(\alpha)$  は  $\phi_1(L)$  に含まれなければならない。対称性から  $\phi_1(L) = \phi_2(L)$  であり、 $E$  はこれらで生成されるため  $E = \phi_1(L) \cong L$  となる。

( $\Leftarrow$ ) 任意の素イデアルによる剰余体が  $L$  に同型であるとする。 $\alpha \in L$  を任意に取り、その  $K$  上の最小多項式を  $f(X)$  とする。 $f(X)$  のある根  $\beta$  を含む  $L$  の拡大体  $\Omega$  を取る。 $\alpha \mapsto \beta$  とする  $K$  上の同型は、環準同型  $\Phi: L \otimes_K L \rightarrow \Omega$  を  $\Phi(x \otimes y) = x \cdot y'$  ( $y'$  は  $y$  を同型で写した像) によって誘導する。

$\ker(\Phi) = \mathfrak{p}$  は素イデアルであり、 $A/\mathfrak{p}$  は  $\Omega$  の部分体と同型になる。仮定より  $\text{Frac}(A/\mathfrak{p}) \cong L$  であるため、第二成分の像 (特に  $\beta$ ) も第一成分の像 (すなわち  $L$  自身のコピー) に含まれなければならない。よって  $\beta \in L$  となり、 $f(X)$  のすべての根は  $L$  に属するため正規拡大である。

### 証明 (4): 有限次分離拡大 $\iff$ 有限個の体の直積

( $\implies$ ) (2)の証明で示したように、有限次分離拡大ならば原始元定理より  $L = K(\alpha)$  と書け、 $A \cong L[X]/(f(X))$  となる。 $f(X)$  は重根を持たないため、中国剰余定理により  $A \cong \prod_{i=1}^r L[X]/(f_i(X))$  となり、各  $f_i$  が既約であることから有限個の体の直積となる。

( $\Leftarrow$ )  $A \cong \prod_{i=1}^r F_i$  (各  $F_i$  は体) であるとする。 $A$  は有限個の体の直積なので被約環であり、(2)より分離拡大であ

る。また、各  $F_i$  は  $L$  を含むため  $L$ -ベクトル空間として少なくとも1次元以上であり、 $A$  全体としても有限次元である。したがって(1)より有限次拡大である。

### 証明 (5): 有限次正規拡大 $\iff$ 剰余体が $L$ である局所Artin環の直積

( $\implies$ ) (1)より有限次なので、 $A$  は  $L$  上有限次元、すなわちArtin環である。Artin環の構造定理より  $A \cong \prod_{i=1}^r A_i$  (各  $A_i$  は極大イデアル  $\mathfrak{m}_i$  をもつ局所Artin環) と一意に分解される。 $A$  の素イデアルは  $\mathfrak{m}_i$  に対応し、剰余環  $A/\mathfrak{m}_i$  は  $A_i/\mathfrak{m}_i$  に同型である。さらに(3)より正規拡大であることから剰余体は  $L$  に同型である。よって  $A_i/\mathfrak{m}_i \cong L$  である。

( $\impliedby$ )  $A \cong \prod_{i=1}^r A_i$  であるとする。 $A$  はArtin環なので  $L$  上有限次元であり、(1)より有限次拡大である。また、各  $A_i$  の剰余体が  $L$  に同型であることは、 $A$  の任意の素イデアルによる剰余体が  $L$  に同型であることを意味する。したがって(3)より正規拡大である。

## 特徴付け (6) の自己完結した直接証明

ここで、Galois理論の要となる (6) の同値性について、他の (1)~(5) を一切経由せず、同型写像を直接構成することで証明します。

### 証明 (6): 有限次Galois拡大 $\iff [L:K]$ 個の体 $L$ の直積

( $\implies$ )  $L/K$  を  $n$  次の有限次Galois拡大とし、そのGalois群を  $G = \text{Gal}(L/K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  とする。写像  $\Phi: L \otimes_K L \rightarrow \prod_{\sigma \in G} L$  を以下のように定義する。

$$\Phi(x \otimes y) = (x\sigma(y))_{\sigma \in G}$$

この  $\Phi$  は、第一成分の積に対して  $\Phi((x_1 x_2) \otimes y) = (x_1 x_2 \sigma(y))_{\sigma \in G} = x_1 \Phi(x_2 \otimes y)$  となるため、 $L$ -代数としての準同型写像である。

両辺の  $L$ -ベクトル空間としての次元を比較すると、 $\dim_L(L \otimes_K L) = \dim_K(L) = n$  であり、右辺の直積も  $n$  個の  $L$  の直積であるため次元は  $n$  である。有限次元ベクトル空間の間の線形写像であるため、 $\Phi$  が単射であることを示せば同型であることが言える。

$\Phi$  が単射でないと仮定する。このとき、非零の元  $u = \sum_{j=1}^m x_j \otimes y_j \in \ker(\Phi)$  が存在する。テンソル積の性質から、 $y_1, \dots, y_m$  は  $K$  上一次独立であるとしてよい。 $u \in \ker(\Phi)$  であるため、すべての  $\sigma \in G$  について以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^m x_j \sigma(y_j) = 0$$

これは、 $L$  から  $L$  への自己同型写像  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  が  $L$  上で一次従属であることを意味している。しかし、Dedekindの補題 (指標の一次独立性) により、相異なる体自己同型は線形独立でなければならないため、これは矛盾である。したがって  $\ker(\Phi) = 0$  となり、 $\Phi$  は同型写像である。

( $\impliedby$ )  $L$ -代数としての同型写像  $\Phi: L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^n L$  が存在すると仮定する。 $L$ -ベクトル空間としての次元を比較すると、 $\dim_L(L \otimes_K L) = \dim_K(L)$  であり、右辺の次元は  $n$  である。したがって  $[L:K] = n$  となり、 $L/K$  は有限次拡大である。

右辺の直積環には、各成分への射影写像  $p_i: \prod_{j=1}^n L \rightarrow L$  が  $n$  個存在する。これらと  $\Phi$  を合成することで、 $A$  から  $L$  への  $n$  個の相異なる  $L$ -代数準同型  $\psi_i = p_i \circ \Phi$  を得る。ここで、各  $\psi_i$  を用いて写像  $\sigma_i: L \rightarrow L$  を次のように定義する。

$$\sigma_i(y) = \psi_i(1 \otimes y)$$

$\psi_i$  は環準同型であるため、 $\sigma_i$  も環準同型 ( $K$  上の体の埋め込み) となる。 $L/K$  は有限次拡大であるため、 $L$  から  $L$  への  $K$ -線形な単射は必ず全射となり、 $\sigma_i$  は  $K$ -自己同型写像 (すなわち  $\text{Gal}(L/K)$  の元) である。

もし  $\sigma_i = \sigma_j$  となる  $i \neq j$  が存在したとすると、任意の  $x, y \in L$  について

$$\psi_i(x \otimes y) = \psi_i(x \otimes 1)\psi_i(1 \otimes y) = x\sigma_i(y) = x\sigma_j(y) = \psi_j(x \otimes y)$$

となり、 $\psi_i = \psi_j$  となってしまうが、これは  $\psi_i$  が  $n$  個の相異なる写像であることに矛盾する。したがって、 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  はすべて相異なる  $n$  個の  $L$  の  $K$ -自己同型である。拡大次数  $[L:K] = n$  に対して自己同型群の位数が  $n$  に等しいため、定義により  $L/K$  は有限次Galois拡大である。

### 3. GrothendieckのGalois理論への応用

ここまでで証明した  $L \otimes_K L \cong \prod_{\sigma \in G} L$  という関係式が、Galois対応の証明にどのように威力を発揮するのかを見ていきましょう。このアプローチでは、「環の直積分解」を制御する 冪等元 (idempotent,  $e^2 = e$  を満たす元) と、群作用の組み合わせが主役になります。

先ほどの例 ( $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ) で、この同型が具体的にどうなっているかを観察してみます。

#### 例 3.1 ( $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ における冪等元の構造)

$L = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$  とする。Galois群は  $G = \{\text{id}, \sigma\}$  (ここで  $\sigma$  は複素共役) である。同型  $\Phi: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  は  $\Phi(x \otimes y) = (xy, x\bar{y})$  で与えられる。

直積環  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  には、明らかな冪等元  $f_1 = (1, 0)$  と  $f_2 = (0, 1)$  が存在する。これらに対応するテンソル積側の元  $e_1 = \Phi^{-1}(f_1), e_2 = \Phi^{-1}(f_2)$  を探す。

$$f_1 + f_2 = (1, 1) = \Phi(1 \otimes 1)$$

$$f_1 - f_2 = (1, -1) = \Phi(-i \otimes i) \text{ (なぜなら } \Phi(-i \otimes i) = (-i^2, -i(\bar{i})) = (1, -i(-i)) = (1, -1))$$

これを解くと、

$$e_1 = \frac{1 \otimes 1 - i \otimes i}{2}, \quad e_2 = \frac{1 \otimes 1 + i \otimes i}{2}$$

が得られる。実際に  $e_1^2 = \frac{1 \otimes 1 - 2i \otimes i + i^2 \otimes i^2}{4} = \frac{1 \otimes 1 - 2i \otimes i + 1 \otimes 1}{4} = e_1$  となり、確かに冪等元をなしている。このように、テンソル積の内部には「成分を切り出す」ための幾何学的な射影演算子が潜んでいる。

それでは、この同型を用いたGalois対応の証明を行います。Artinの不等式評価は一切登場しません。

#### 定理 3.2 (Galois対応の基本定理)

$L/K$  を有限次Galois拡大、そのGalois群を  $G$  とする。中間体  $M$  と、部分群  $H \subset G$  は、対応  $H \mapsto L^H$  (不変体) および  $M \mapsto \text{Gal}(L/M)$  によって1対1に対応する。

#### 証明

同型  $\Phi: L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in G} L$  において、Galois群  $G$  の元  $\tau$  は、テンソル積の右側の成分に対して  $\tau \cdot (x \otimes y) = x \otimes \tau(y)$  として作用する。この作用は右辺の直積成分のインデックスを  $(\tau \cdot \mathbf{c})_{\sigma} = c_{\sigma\tau}$  のようにシフトさせる。

ステップ1: 部分群  $H$  から出発し、 $\text{Gal}(L/L^H) = H$  を示す

任意の部分群  $H \leq G$  を取り、対応する中間体を  $M = L^H$  とする。 $L \otimes_K L$  と  $\prod_{\sigma \in G} L$  の双方において、 $H$  の作用で

不変な部分環 ( $H$ -不変部分) を考える。

- 左辺の  $H$ -不変部分は  $(L \otimes_K L)^H = L \otimes_K (L^H) = L \otimes_K M$  であり、その  $L$ -ベクトル空間としての次元は  $\dim_K(M) = [M : K]$  である。
- 右辺の直積環の元  $c$  が  $H$ -不変であるとは、任意の  $h \in H$  と  $\sigma \in G$  について  $c_\sigma = c_{\sigma h}$  となること。すなわち左剰余類  $\sigma H$  の上で定数になることである。左剰余類は  $[G : H] = |G|/|H|$  個存在するため、不変部分の  $L$ -次元は  $[G : H]$  である。

したがって  $[M : K] = [G : H]$  を得る。 $[L : K] = |G| = [L : M][M : K]$  より、直ちに  $[L : M] = |H|$  となる。明らかに  $H \subset \text{Gal}(L/M)$  であり、(後述のステップ2により)  $\text{Gal}(L/M)$  の位数は  $[L : M]$  に等しいため、包含関係と位数が一致し  $H = \text{Gal}(L/M)$  が従う。

**ステップ2: 中間体  $M$  から出発し、 $L^{\text{Gal}(L/M)} = M$  を示す**

任意の中間体  $K \subset M \subset L$  を取り、 $H_M = \text{Gal}(L/M)$  とする。自然な全射環準同型  $\pi : L \otimes_K L \rightarrow L \otimes_M L$  を考える。この全射の核  $I_M$  は、集合  $\{1 \otimes m - m \otimes 1 \mid m \in M\}$  で生成されるイデアルである。すなわち  $(L \otimes_K L)/I_M \cong L \otimes_M L$  となる。

同型  $\Phi$  を通じて、この生成元の像を計算すると、

$$\Phi(1 \otimes m - m \otimes 1) = (\sigma(m) - m)_{\sigma \in G}$$

となる。イデアル  $\Phi(I_M)$  は、「すべての  $m \in M$  に対して  $\sigma(m) = m$  となる成分」、すなわち  $\sigma \in H_M$  に対応する成分においてのみ値が 0 となる元の集合によって生成される。したがって、このイデアルで右辺の直積環を割ると、 $H_M$  に対応する成分だけが生き残り、

$$\prod_{\sigma \in G} L / \Phi(I_M) \cong \prod_{\sigma \in H_M} L$$

という同型が得られる。この同型は左辺の剰余環  $L \otimes_M L$  と結ばれるため、 $L \otimes_M L \cong \prod_{\sigma \in H_M} L$  となる。

両辺の  $L$ -ベクトル空間としての次元を比較する。左辺の次元は  $[L : M]$  であり、右辺の次元は直積の成分数  $|H_M|$  である。したがって  $[L : M] = |H_M|$  を得る。

ステップ1の次元計算を  $H = H_M$  に対して適用すると  $[L : L^{H_M}] = |H_M|$  となる。 $M \subset L^{H_M}$  でありながら、 $L$  までの拡大次数が互いに  $|H_M|$  で完全に一致するため、 $M = L^{H_M}$  でなければならない。これでGalois対応の全単射性が完全に証明された。

このように、可換環のテンソル積は体の枠組みを越えてGalois理論を展開するための強力な言語を提供してくれます。これはトポロジーにおける被覆空間 (covering space) の理論と完全にパラレルな関係にあり、現代数学の豊かさを感じさせる美しい理論です。

## 4. 参考文献

1. N. Bourbaki, *Algebra II, Chapters 4 - 7*, Springer-Verlag, 1990. [\[Link\]](#)
2. A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1960-61 - Revêtements étales et groupe fondamental - (SGA 1)*, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer, 1971. (Available at arXiv:math/0206203) [\[Link\]](#)